

Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 2

Aufgabe 1:

\Leftarrow Sei $(x > 0$ und $y > 0)$ oder $(x < 0$ und $y < 0)$.

Dann gilt $xy > 0$. Falls $x, y > 0$ folgt dies aus Monotoniegesetz der Multiplikation (Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz$). Sind $x, y < 0$ so sind $-x, -y > 0$. Es folgt also $xy = (-x)(-y) > 0$.

\Rightarrow Widerspruchsbeweis:

Angenommen, es gilt nicht $(x > 0$ und $y > 0)$ oder $(x < 0$ und $y < 0)$.

Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- 1.) $x = 0$ oder $y = 0$
- 2.) $(x > 0$ und $y < 0)$ oder $(x < 0$ und $y > 0)$

Im 1. Fall gilt $xy = 0$.

Im 2. Fall folgt $xy < 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation.

In beiden Fällen Widerspruch zur Voraussetzung $xy > 0$.

Aufgabe 2:

Anwenden der Dreiecksungleichung:

Es gilt: $2|x| = |(x+y) + (x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$ und

$$2|y| = |(x+y) + (y-x)| \leq |x+y| + |y-x| = |x+y| + |x-y|$$

Addition dieser beiden Ungleichungen ergibt:

$$2|x| + 2|y| \leq 2(|x+y| + |x-y|)$$

Division durch zwei liefert die Behauptung.

Aufgabe 3:

Man muss zeigen:

- 1.) $\sup A + \sup B$ ist eine obere Schranke von $A + B$
- 2.) Es existiert keine kleinere obere Schranke von $A + B$

Zu 1.) Sei $x \in A + B$ bel..

Dann ist x von der Form $x = a + b$ mit $a \in A$ und $b \in B$.

Aus $a \leq \sup A$ und $b \leq \sup B \Rightarrow x = a + b \leq \sup A + \sup B$.

Also ist $\sup A + \sup B$ obere Schranke von $A + B$.

Zu 2.) Sei $\gamma < (\sup A + \sup B)$ beliebig.

Man muss zeigen: γ ist keine obere Schranke von $A + B$.

Mit $\varepsilon := (\sup A + \sup B) - \gamma$ ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Also sind $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\sup B - \frac{\varepsilon}{2}$

keine oberen Schranken von A bzw. B .

Es gibt somit Elemente $a \in A$ und $b \in B$

mit $(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}) < a$ und $(\sup B - \frac{\varepsilon}{2}) < b$.

Es folgt: $(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}) + (\sup B - \frac{\varepsilon}{2}) = (\sup A + \sup B) - \varepsilon < a + b$.

Also $a+b \in a+B$ und somit ist $\gamma = (\sup A + \sup B) - \varepsilon$
keine obere Schranke von $A + B$.

Aufgabe 4:

$$\text{IV: } \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

IA: $n=1$: Beide Seiten der behaupteten Gleichung gleich 1

IS: Ann.: IV stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$

Schluss von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Es gilt:

$$a_n := \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Aufgabe 6:

Die Folge konvergiert in \mathbb{R} gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Wegen $|f_1(x)| = |\sin x| \leq 1$ gilt $|f_n(x)| \leq f_n(1)$ für $n > 1$.

Also muss man nur noch zeigen, dass die durch $a_1 := 1$

und $a_{n+1} := \sin a_n$ definierte Folge gegen Null konvergiert.

Die Folge ist monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt

\Rightarrow konvergent.

Da \sin stetig, muss für den Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ gelten $a = \sin a$.

Dies ist genau für $a=0$ der Fall.

Aufgabe 7:

Sei $\varepsilon > 0$ bel.. Man muss zeigen, dass es ein $\delta > 0$ derart gibt,

dass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

für alle x aus dem Definitionsbereich \mathbb{R} .

Wie man die Differenz der Funktionswerte $f(x)$ und $f(x_0)$ abschätzt,

hängt natürlich von der gegebenen Funktion f ab.

In diesem Fall kann man so vorgehen:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x-1}{x^2+1} - (-1) \right| = \left| \frac{x}{x^2+1} \right| |x+1| \leq |x - (-1)|$$

Also kann man $\delta := \varepsilon$ wählen.

Dann folgt mit der obigen Abschätzung für alle $x \in \mathbb{R}$

mit $|x - x_0| = |x + 1| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - (-1)| \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 8:

1.)

f_0 ist in x_0 unstetig, denn für die Folge $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ gilt $x_n \rightarrow x_0 = 0$,
aber $f_0(x_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow f_0(0) = 0$.

2.)

f_1 ist in x_0 stetig.

Sei nämlich $(x_n)_n$ irgendeine reelle Folge mit $x_n \rightarrow 0$.

Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen,

dass alle $x_n \neq x_0 = 0$ sind.

Dann gilt $|f_1(x)| = |x_n| |\sin(\frac{1}{x_n})| \leq |x_n|$, also $f(x_n) \rightarrow f(x_0) = 0$.

Aufgabe 9:

\sqrt{x} ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig,

da jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall

gleichmäßig stetig ist.

Ein $\varepsilon - \delta$ -Beweis könnte wie folgt aussehen:

Sei $\varepsilon > 0$ bel. vorgegeben. Wähle $\delta := \varepsilon^2$.

Seien $x, y \in [0, 1]$ bel. mit $|x - y| < \delta$.

Dann gilt:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

(Die linke Ungleichung kann man leicht durch Quadrieren beweisen)

Aufgabe 10:

Nach den Rechenregeln für differenzierbare Funktionen,

insbes. Produkt- und Kettenregel, sind f_1 und f_2 in $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$

differenzierbar und zwar mit den Ableitungen:

$$f_1'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \text{ und } f_2'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Nach den Rechenregeln für stetige Funktionen sind diese Ableitungen

in \mathbb{R}^* stetig, f_1 und f_2 also in \mathbb{R}^* stetig differenzierbar.

Zu untersuchen bleibt das Verhalten bei $x_0 := 0$.

f_1 ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar,

denn für den Differenzenquotienten gilt:

$$\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

und $\sin \frac{1}{x}$ besitzt keinen Grenzwert für $x \rightarrow 0$ (Beweis mit Folgenkriterium)

f_2 ist in $x_0 = 0$ differenzierbar und zwar mit den Ableitungen $f_2' = 0$,

denn hier ergibt sich für den Differenzenquotienten:

$$\frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0.$$

f_2' ist in $x_0 = 0$ nicht stetig, denn der Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow 0} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}]$ existiert nicht.

(Der erst Summand geht gegen Null,

der zweite besitzt für $x \rightarrow 0$ keinen Grenzwert,
also kann die Summe auch keinen besitzen)

Aufgabe 11:

1.)

Nach dem Mittelwertsatz gilt $f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$

für ein ξ zwischen x und $x+1$.

Mit $x \rightarrow \infty$ geht auch $\xi \rightarrow \infty$. Also folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(\xi) =$

a.

2.)

Sei f beschränkt ($|f(x)| < M$) und angenommen, $a \neq 0$ (etwa $a > 0$)

Dann gibt es eine Stelle x_0 , sodass für alle $\xi > x_0$ gilt $f'(\xi) > \frac{a}{2}$.

Damit folgt aus dem MWS $f(x) - f(x_0) \rightarrow \infty$ und damit $f(x) \rightarrow \infty$.

Dies ist ein Widerspruch zu f beschränkt. Somit ist Aussage 2.) bewiesen.

3.)

Diese Aussage ist falsch. Man kann als Gegenbeispiel $f(x) := \sin \sqrt{x}$ wählen.

f ist beschränkt und es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0$.

Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert aber nicht.

Aufgabe 12:

Der Abstand des Punktes $(x, y(x))$ vom Ursprung $(0, 0)$

ist $d(x) := \sqrt{x^2 + y^2(x)}$

Es ist einfacher, statt d die Funktion $D := d^2$ zu untersuchen.

(D ist maximal genau dann, wenn d maximal ist)

$D(x) = d^2(x) = x^2 + (3x - x^2)^2$ ist im Intervall $[0, 3]$ differenzierbar.

Als Extremalstellen kommen daher nur die beiden Randpunkte 0 und 3

und etwaige stationäre Punkte in Frage.

Natürlich ist $x_0 := 0$ die absolute Minimalstelle.

es ist: $D'(x) = 2x + 2(3x - x^2)(3 - 2x) = 2x(2x - 5)(x - 2)$

Vorzeichenbetrachtung ergibt: D und damit auch d

nimmt von $x_0 := 0$ bis $x_1 := 2$ streng monoton zu,

fällt dann streng monoton bis $x_2 := \frac{5}{2}$,

um anschließend wieder bis zum Rand $x_3 := 3$ streng monoton zu steigen.

Damit ist klar, dass x_1 ein relatives Maximum,

x_2 ein relatives Minimum und x_3 wieder ein relatives (Rand-) Maximum ist.

Wegen $D(2) = 8$ und $D(3) = 9$ wird das absolute Maximum

in $x_3 := 3$ angenommen.